

Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра моделирования электромеханических и компьютерных систем

Быкова Дарья Сергеевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Решение задач идентификации параметров
математической модели установившегося течения
газовой смеси по морским газопроводам.

Направление 010900

«Прикладные математика и физика»

Основная образовательная программа

«Прикладные математика, физика и процессы управления»

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Ермолаева Н.Н.

Санкт-Петербург
2017

Содержание

Введение	2
Глава 1. Расчет коэффициента гидравлического сопротивления и суммарного коэффициента теплообмена по экспериментальным данным	4
1.1 Математическая модель установившегося течения газа по морскому газопроводу	4
1.2 Параметрическая идентификация модели на основе метода квазилинеаризации нелинейных краевых задач	7
1.2.1 Определение плотности газа по известным температуре и давлению из уравнения Редлиха — Квонга	12
1.3 Решение тестовых задач	16
Глава 2. Исследование влияния давления и температуры на входе в газопровод на характеристики потока	19
Заключение	22
Список литературы	23
Приложение	26

Введение

Соответствие математической модели реальному процессу определяется как самой моделью, так и точностью расчетов. Построить математическую модель, адекватную реальной системе, только на основе теоретических исследований физических процессов протекающих в системе не представляется возможным. Поэтому, одновременно с теоретическими исследованиями необходимо проводить многочисленные эксперименты по уточнению параметров модели системы. Таким образом для построения адекватной математической модели требуется проведение процедуры идентификации ее параметров. При решении задачи параметрической идентификации известна довольно обширная информация о системе. Такая постановка задачи наиболее соответствует реальным условиям проектирования и широко применяется.

Значительный вклад в развитие этой области внесли работы отечественных и зарубежных ученых А. Н. Тихонова [1], [2], Ю. Е. Аниконова [3], Л. Льюнинга [21], Р. Беллмана [4], П. Эйкхоффа [5], Д. Гропа [6] и других.

Теории и методам идентификации параметров моделей транспортировки природного газа по магистральным и морским газопроводам посвящены работы Г. Д. Бабе, Э. А. Бондарева, А. Ф. Воеводина, А. М. Каниболотского [7], [19], Н. Н. Ермолаевой, Г. И. Курбатовой [8], К. Казака [12], А. В. Лежнева [11], С. А. Бобровского и др. [9]. В настоящей работе исследуется параметрическая идентификация модели установившегося неизотермического течения газа по подводному газопроводу. Модель содержит коэффициент гидравлического сопротивления λ и суммарный коэффициент теплообмена β газа с окружающей средой, значения которых трудно поддаются измерению. На их величины влияют, как внешние условия — температура окружающей воды, условия обтекания, так и текущее состояние газопровода, режимы течения.

Указанные коэффициенты меняются во времени в результате выпадения гидратов, конденсата и вариации внешних условий — сезонного изменения температуры окружающей среды и т. д. Сравнивая коэффициенты гидравлического сопротивления на разных участках газопровода, получен-

ные в результате их идентификации, можно определять места засорения газопровода.

В работе С. А. Бобровского и др. [9] приведены методы определения коэффициента гидравлического сопротивления по движению скачка давления газа и изменению расхода на конце газопровода на стадии испытания газопровода. В ряде работ, например в работах А. Ф. Воеводина, А. М. Каниболотского [10], А. В. Лежнева [11], К. А. Казака [12] используются методы позволяющие проводить процедуру идентификации по тем данным, которые контролируются в процессе эксплуатации газопроводов. Идентификация коэффициентов позволяет адаптировать математическую модель к реальным условиям функционирования газопровода.

Еще одним важным моментом при исследовании течений газа является вопрос о выборе допустимых значений температуры и давления на входе в газопровод. В работе исследуется влияние этих параметров на скорость потока, т. к. существуют ограничения на скорость, связанные с возникновением в газопроводе вибраций. Вибрации приводят к аварийным ситуациям на стыках линейных участков с компрессорными станциями.

Цель настоящей работы заключается в определении параметров модели установившегося неизотермического течения газа по морскому газопроводу. Для достижение этой цели в работе **решены следующие задачи.**

1. Проведена идентификация коэффициента гидравлического сопротивления и суммарного коэффициента теплообмена математической модели установившегося течения газовой смеси по морским газопроводам.
2. Исследована область допустимых значений давления и температуры газа на входе в газопровод.

Глава 1. Расчет коэффициента гидравлического сопротивления и суммарного коэффициента теплообмена по экспериментальным данным

1.1 Математическая модель установившегося течения газа по морскому газопроводу

Установившийся режим течения является основным режимом работы газопроводов. Математическая модель установившегося режима течения газа по морскому цилиндрическому газопроводу, используемая в данной работе, разработана Курбатовой Г. И., Поповой Е. А., Филипповым Б. В., Филипповой В. Б., Филипповым К. Б. Следуя работе [13], запишем математическую модель установившегося неизотермического течения смеси газов по морскому газопроводу:

$$\rho u = Q/(\pi R^2), \quad (1)$$

$$\rho u \frac{du}{dz} = -\frac{dp}{dz} - \frac{\lambda \rho u |u|}{4R} + \rho g \cos \alpha(z), \quad (2)$$

$$c_v \rho u \frac{dT}{dz} = -\left(\frac{\rho T h}{(1 - \delta \rho)} + \frac{c \rho^2}{2(1 + \delta \rho) T^{1/2}} \right) \frac{du}{dz} + \frac{2\beta(T^* - T)}{R} + \frac{\lambda \rho u^2 |u|}{4R}, \quad (3)$$

$$p = \frac{h \rho T}{1 - \delta \rho} - \frac{c \rho^2}{(1 + \delta \rho) T^{1/2}}, \quad (4)$$

$$\text{при } z = 0 : \quad p = p_{zo}, \quad T = T_{zo}. \quad (5)$$

Здесь (1) — интеграл уравнения неразрывности, (2) — уравнение движения, (3) — тепловое уравнение, (4) — уравнение состояния Редлиха — Квонга. Плотность газа на входе ρ_{zo} определяется из уравнения состояния по известным давлению p_{zo} и температуре T_{zo} (п. 1.2.1, выражение (38)).

В системе (1)–(5) приняты следующие обозначения: z — координата вдоль оси газопровода; Q — массовый расход газа; R — внутренний радиус газопровода; u, ρ, p, T — скорость, плотность, давление, температура газовой смеси соответственно; T^* — температура окружающей воды; β — суммарный коэффициент теплопередачи, учитывающий три механизма передачи тепла между потоком газа и окружающей средой, а именно — конвективный теплообмен между потоком газа и внутренней стенкой газопровода,

кондуктивный — через слои обшивки и теплообмен между внешней стенкой и окружающей водой; λ — коэффициент гидравлического сопротивления; $h = R_0/M$, $M = \sum_1^n \eta_k m_k$; $\sum_1^n \eta_k = 1$; $\delta = \Omega_b R_0 T_c / M p_c$, $c = \Omega_a (R_0)^2 T_c^{2,5} / M^2 p_c$ — константы в уравнении состояния зависящие от состава газовой смеси, m_k, η_k — молекулярный вес и доля k -й составляющей смеси газа из n компонент, Ω_a, Ω_b — известные константы; p_c, T_c — критическое давление и температура смеси газа заданного химического состава [14]; R_0 — универсальная газовая постоянная; g — ускорение силы тяжести; $\alpha(z)$ — угол между осью газопровода z и направлением силы тяжести.

Система уравнений модели (1)–(5) может быть разрешена относительно производных $\frac{d\rho}{dz}, \frac{dT}{dz}$. В этом случае в безразмерном виде система (1)–(5) записывается следующим образом (штрихи у безразмерных величин опущены):

$$\rho u = 1, \quad (6)$$

$$\frac{d\rho}{dz} = m_1 \rho^2 \frac{dp}{dz} + m_2 \rho, \quad (7)$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{m_4}{\rho^2} + \left(m_5 \frac{p}{\rho^2} + \frac{m_7}{(1 + m_3 \rho) T^{1/2}} \right) \frac{d\rho}{dz} + m_6 (T^* - T), \quad (8)$$

$$p = m_8 \frac{\rho T}{1 - m_3 \rho} - m_9 \frac{\rho^2}{(1 + m_3 \rho) T^{1/2}}, \quad (9)$$

$$z = 0 : \quad p_0 = p_{xo}/p_x, \quad T_0 = T_{xo}/T_x. \quad (10)$$

В систему (6)–(10) входят безразмерные комплексы m_1 – m_9 , которые выражаются через параметры задачи и характерные величины $p_x, T_x, \rho_x = \rho(p_x, T_x), l_x, u_x = Q/(\pi R^2 \rho_x)$ по формулам:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{p_x}{\rho_x u_x^2}, & m_2 &= \frac{\lambda l_x}{4R}, & m_3 &= \delta \rho_x, \\ m_4 &= \frac{\lambda u_x^2 l_x}{4c_v R T_x}, & m_5 &= \frac{p_x}{\rho_x c_v T_x}, & m_6 &= \frac{2l_x \beta}{\rho_x c_v u_x R^2}, \\ m_7 &= \frac{3c \rho_x}{2c_v T_x^{3/2}}, & m_8 &= \frac{h \rho_x T_x}{p_x}, & m_9 &= \frac{c \rho_x^2}{p_x T_x^{1/2}}. \end{aligned}$$

Производная $\frac{dp}{dz}$ в уравнении (7) может быть найдена из уравнения состояния Редлиха — Квонга (9):

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dz} + \frac{\partial p}{\partial T} \frac{dT}{dz}.$$

С учетом этого, уравнение (7) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{d\rho}{dz} = m_1 \rho^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dz} + \frac{\partial p}{\partial T} \frac{dT}{dz} \right) + m_2 \rho,$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial T} &= m_8 \frac{\rho}{(1 - m_3 \rho)} + m_9 \frac{\rho^2}{(1 + m_3 \rho) T^{3/2}} = f_T, \\ \frac{\partial p}{\partial \rho} &= m_8 \frac{T}{(1 - m_3 \rho)^2} - m_9 \frac{\rho(2 + m_3 \rho)}{(1 + m_3 \rho)^2 T^{1/2}} = f_\rho. \end{aligned}$$

После громоздких, но не сложных выкладок математическая модель установившегося течения газовой смеси по морскому газопроводу может быть записана в виде:

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{f_2 + f_1 f_3 f_T}{1 - f_1 f_\rho - f_1 f_4 f_T - f_1 f_5 f_T} = F_1(\rho, T, \lambda, \beta), \quad (11)$$

$$\frac{dT}{dz} = f_3 + \frac{(f_4 + f_5)(f_2 + f_1 f_3 f_T)}{1 - f_1 f_\rho - f_1 f_4 f_T - f_1 f_5 f_T} = F_2(\rho, T, \lambda, \beta), \quad (12)$$

$$p = f_p, \quad u = 1/\rho \quad (13)$$

с граничным условием (5).

Функции $f_p, f_T, f_\rho, f_1 \div f_5$ выражаются через безразмерные комплексы $m_1 \div m_8$ и безразмерные плотность ρ и температуру T по формулам:

$$\begin{aligned} f_p &= m_8 \frac{\rho T}{1 - m_3 \rho} - m_9 \frac{\rho^2}{(1 + m_3 \rho) T^{1/2}}, \\ f_1 &= m_1 \rho^2, \quad f_2 = m_2 \rho, \quad f_3 = m_4 \frac{1}{\rho^2} + m_6 (T^* - T), \\ f_4 &= m_5 \frac{p}{\rho^2} = m_5 \left(m_8 \frac{T}{(1 - m_3 \rho) \rho} - m_9 \frac{1}{(1 + m_3 \rho) T^{1/2}} \right), \\ f_5 &= m_7 \frac{1}{(1 + m_3 \rho) T^{1/2}}. \end{aligned}$$

Функции F_1, F_2 (правые части дифференциальных уравнений (11), (12)) непрерывны и ограничены в области G :

$$G: \quad z \in [0, L], \quad |\rho - \rho_{z0}| \leq \tilde{\rho}, \quad |T - T_{z0}| \leq \tilde{T}, \quad |\lambda - \lambda_0| \leq \tilde{\lambda}, \quad |\beta - \beta_0| \leq \tilde{\beta}.$$

Величины $\tilde{\rho}$ и \tilde{T} определяются параметрами режима в каждой конкретной задаче, величина λ_0 рассчитывается из закона сопротивления Коулбрука–Уайта, величина β_0 находится по известным априорным оценкам [16], величины $\tilde{\lambda}, \tilde{\beta}$ выбираются для определенных условий реализации установившегося течения газа. Величины ρ_{z0} и T_{z0} определяются таким образом, что давление на входе $p_{z0} = p(\rho_{z0}, T_{z0})$ выше критического. Его расчет приведен в главе 2. Как показали исследования, для режимов представляющих практический интерес, существуют непрерывные частные производные функций F_1 и F_2 по ρ, T, λ, β , т. е. $\frac{\partial F_i}{\partial \lambda}, \frac{\partial F_i}{\partial \beta}, \frac{\partial F_i}{\partial \rho}, \frac{\partial F_i}{\partial T}, i = 1, 2$ в области G . Таким образом, в области G решение системы (11)–(13) с граничным условием (5) существует и единственно.

В настоящей работе для параметрической идентификации модели (11)–(13) используется метод квазилинеаризации нелинейных краевых задач.

1.2 Параметрическая идентификация модели на основе метода квазилинеаризации нелинейных краевых задач

Метод квазилинеаризации был предложен Беллманом и Калабой [4], [22] для решения краевых задач в теории нелинейных дифференциальных уравнений. Он представляет собой метод преобразования нелинейной краевой задачи в последовательность линейных задач. Метод применяется как к дискретным, так и к непрерывным процессам. Идентифицируемые параметры предполагаются постоянными или медленно изменяющимися в сравнение со скоростью сходимости процедуры идентификации. Для быстрой сходимости процедуры необходимо хорошее начальное приближение идентифицируемых коэффициентов. В рассматриваемых задачах о течении газа в трубах начальное приближение обеспечивается имеющимися полуэмпирическими законами сопротивления, основанными на обширном экспериментальном материале, например, законом Коулбрука–Уайта.

Достоинством этого метода является его применимость в реальном масштабе времени, т. к. он является итерационным и не требует введения специальных пробных воздействий. Метод предполагает фиксированное число измерений и естественным образом распространяется на многоточечные задачи.

Для протяженных трасс, когда внешние условия нельзя считать неизменными вдоль всего газопровода, трасса разбивается на несколько участков. Предполагается, что на каждом участке изменение искомых коэффициентов λ и β пренебрежимо мало. В этом случае модифицированная математическая модель (11)–(13) для каждого участка газопровода записывается в виде:

$$\frac{d\rho_i}{dz} = \frac{\tilde{f}_2 + f_1\tilde{f}_3f_T}{1 - f_1f_\rho - f_1f_4f_T - f_1f_5f_T} = F_1(\rho_i, T_i, \lambda_i, \beta_i), \quad (14)$$

$$\frac{dT_i}{dz} = \tilde{f}_3 + \frac{(f_4 + f_5)(\tilde{f}_2 + f_1\tilde{f}_3f_T)}{1 - f_1f_\rho - f_1f_4f_T - f_1f_5f_T} = F_2(\rho_i, T_i, \lambda_i, \beta_i), \quad (15)$$

$$\frac{d\lambda_i}{dz} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{d\beta_i}{dz} = 0, \quad (17)$$

$$p_i = f_p, \quad u_i = 1/\rho_i, \quad (18)$$

Индексом i обозначен номер участка газопровода $i = 1, \dots, n-1$, n — число участков, z_{0_i} — координата начала i -го участка.

Давление p_i^L и температура T_i^L на конце каждого участка считаются известными из эксперимента, плотность ρ_i^L на концах участков определяется из решения уравнения состояния (9) (пункт 1.2.1). Это позволяет записать дополнительные условия на границе i -го и $(i+1)$ -го участков:

$$z = z_i^* : \quad p(z_i^*) = p_i^L = p_{i+1}^0, \quad T(z_i^*) = T_i^L = T_{i+1}^0. \quad (19)$$

Функции $f_\rho, f_T, f_p, f_1 \div f_5$ явно выражаются через искомые функции ρ_i, T_i и искомые коэффициенты λ_i, β_i , через характерные величины и через известные параметры модели:

$$f_p = m_8 \frac{T_i}{(1 - m_3\rho_i)^2} - m_9 \frac{\rho_i(2 + m_3\rho_i)}{(1 + m_3\rho_i)^2 T_i^{1/2}},$$

$$\begin{aligned}
f_T &= m_8 \frac{\rho_i}{(1 - m_3 \rho_i)} - m_9 \frac{\rho_i^2}{(1 + m_3 \rho_i) T_i^{1/2}}, \\
f_1 &= m_1 \rho_i^2, \quad \tilde{f}_2 = \tilde{m}_2 \rho_i \lambda_i, \\
\tilde{f}_3 &= \tilde{m}_4 \frac{\lambda_i}{\rho_i^2} + m_6 \beta_i (T^* - T_i), \\
f_4 &= m_5 \frac{p_i}{\rho_i^2} = m_5 \left(m_8 \frac{T_i}{(1 - m_3 \rho_i) \rho_i} - m_9 \frac{1}{(1 + m_3 \rho_i) T_i^{1/2}} \right), \\
f_5 &= m_7 \frac{1}{(1 + m_3 \rho_i) T_i^{1/2}}, \\
m_1 &= \frac{p_x}{\rho_x u_x^2}, \quad \tilde{m}_2 = \frac{l_x}{4R}, \quad m_3 = \delta \rho_x, \\
\tilde{m}_4 &= \frac{u_x^2 l_x}{4c_v R T_x}, \quad m_5 = \frac{p_x}{\rho_x c_v T_x}, \\
m_6 &= \frac{2l_x}{\rho_x c_v u_x R^2}, \quad m_7 = \frac{3c \rho_x}{2c_v T_x^{3/2}}, \\
m_8 &= \frac{h \rho_x T_x}{p_x}, \quad m_9 = \frac{c \rho_x^2}{p_x T_x^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Алгоритм расчета коэффициентов λ и β на выделенном участке

Опустим у искомых величин индексы, соответствующие номеру участка. Обозначим плотность, температуру, коэффициент гидравлического сопротивления и коэффициент суммарного теплообмена на i -м участке $\rho = \rho_i$, $T = T_i$, $\lambda = \lambda_i$ и $\beta = \beta_i$ соответственно. Как отмечалось выше, на каждом участке газопровода решение системы (14)–(17) сводится к решению последовательности линейных задач, полученных путем линеаризации модифицированной системы. Линеаризованная система относительно функций ρ^{s+1} , T^{s+1} и коэффициентов λ^{s+1} , β^{s+1} в $(s+1)$ -й итерации записывается в виде:

$$\frac{d\rho^{s+1}}{dz} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right)_s (\rho - \rho^s) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial T} \right)_s (T - T^s) + \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \right)_s (\lambda - \lambda^s) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \beta} \right)_s (\beta - \beta^s), \\
\frac{dT^{s+1}}{dz} &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial \rho} \right)_s (\rho - \rho^s) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial T} \right)_s (T - T^s) + \\
& + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} \right)_s (\lambda - \lambda^s) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \beta} \right)_s (\beta - \beta^s),
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\frac{d\lambda^{s+1}}{dz} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{d\beta^{s+1}}{dz} = 0. \tag{23}$$

Функции ρ^s, T^s и коэффициенты λ^s, β^s известны из решения системы в s -й итерации.

Можно показать, что искомые коэффициенты входят в правые части уравнений (14), (15) линейно. Исходя из этого предлагается использовать линейную аппроксимацию для решения линеаризованной системы. Подобная аппроксимация была применена в работе О. Ф. Васильева, Э. А. Бондарева, М. А. Кониболовского [10], но для другой системы уравнений. В связи с тем, что в представленную модель коэффициенты λ и β тоже входят линейно в работе использована такая же аппроксимация. Таким образом решение линеаризованной системы (20), (23) предлагается аппроксимировать, линейными относительно $\lambda^{s+1}, \beta^{s+1}$ функциями:

$$\rho^{s+1}(z) = C_{11}^s(z)\lambda^{s+1} + C_{12}^s(z)\beta^{s+1} + C_1^s(z), \tag{24}$$

$$T^{s+1}(z) = C_{21}^s(z)\lambda^{s+1} + C_{22}^s(z)\beta^{s+1} + C_2^s(z). \tag{25}$$

Функции $C_{kj}^s(z), C_k^s(z), k, j = 1, 2$ подлежат определению.

Уравнения (20), (21) с учетом представления (24), (25) могут быть приведены к системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $C_{kj}^s(z), C_k^s(z)$ для $z \in [z_i^*, z_{i+1}^*]$:

$$\begin{aligned}
\frac{dC_{11}^s}{dz} &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right)_s C_{11}^s(z) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial T} \right)_s C_{21}^s(z) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \right)_s, \\
\frac{dC_{21}^s}{dz} &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial \rho} \right)_s C_{11}^s(z) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial T} \right)_s C_{21}^s(z) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} \right)_s,
\end{aligned} \tag{26}$$

$$C_{11}^s(z_i^*) = 0, \quad C_{21}^s(z_i^*) = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_{12}^s}{dz} &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right)_s C_{12}^s(z) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial T} \right)_s C_{22}^s(z) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \right)_s, \\ \frac{dC_{22}^s}{dz} &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial \rho} \right)_s C_{12}^s(z) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial T} \right)_s C_{22}^s(z) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} \right)_s, \end{aligned} \quad (28)$$

$$C_{12}^s(z_i^*) = 0, \quad C_{22}^s(z_i^*) = 0. \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_1^s}{dz} &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right)_s C_{11}^s(z) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial T} \right)_s C_{21}^s(z) + (F_1)_s - \\ &- \left(\frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right)_s \rho^s + \left(\frac{\partial F_1}{\partial T} \right)_s T^s + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \right)_s \lambda^s + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \beta} \right)_s \beta^s, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_2^s}{dz} &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial \rho} \right)_s C_1^s(z) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial T} \right)_s C_2^s(z) + (F_2)_s - \\ &- \left(\frac{\partial F_2}{\partial \rho} \right)_s \rho^s + \left(\frac{\partial F_2}{\partial T} \right)_s T^s + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} \right)_s \lambda^s + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \beta} \right)_s \beta^s, \end{aligned} \quad (31)$$

$$C_1^s(z_i^*) = \rho(z_{0_i}), \quad C_2^s(z_i^*) = T(z_{0_i}). \quad (32)$$

Граничные условия (27), (29), (32) для искомых функций C_{kj}^s, C_k^s следуют из линейного представления (24), (25) и граничных условий (19). Выражения для производных

$$\frac{\partial F_k}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial F_k}{\partial T}, \quad \frac{\partial F_k}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial F_k}{\partial \beta}, \quad k = 1, 2$$

имеют весьма громоздкий вид и приведены в Приложении. Несмотря на это, численное решение задачи (26)–(32) не вызывает принципиальных трудностей. В настоящей работе оно было получено методом Рунге – Кутты четвертого порядка. В результате решения системы (26)–(32) находятся искомые функции $C_{kj}^s(z), C_k^s(z)$ для $z \in [z_i^*, z_{i+1}^*]$.

Дополнительные условия (19) совместно с представлениями (24), (25) приводят к системе линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов $\lambda^{s+1}, \beta^{s+1}$:

$$\rho^L = C_{11}^s(z_{i+1}^*)\lambda^{s+1} + C_{12}^s(z_{i+1}^*)\beta^s + C_1^s(z_{i+1}^*),$$

$$T^L = C_{21}^s(z_{i+1}^*)\lambda^s + C_{22}^s(z_{i+1}^*)\beta^s + C_2^s(z_{i+1}^*).$$

Здесь z_{i+1}^* — конец рассматриваемого i -го участка, значения ρ^L, T^L , как отмечалось выше, считаются известными из эксперимента. Решение этой системы имеет вид

$$\lambda^{s+1} = \frac{C_{22}^s(L)(\rho^L - C_1^s(L)) - C_{12}^s(L)(T^L - C_2^s(L))}{C_{11}^s(L)C_{22}^s(L) - C_{12}^s(L)C_{21}^s(L)},$$

$$\beta^{s+1} = \frac{C_{11}^s(L)(T^L - C_2^s(L)) - C_{21}^s(L)(\rho^L - C_1^s(L))}{C_{11}^s(L)C_{22}^s(L) - C_{12}^s(L)C_{21}^s(L)}.$$

Распределения плотности $\rho^{s+1}(z)$ и температуры $T^{s+1}(z)$ в $(s+1)$ -й итерации определяются по найденным параметрам $\lambda^{s+1}, \beta^{s+1}$ из представления (24), (25).

Условием окончания итерационного процесса определения параметров λ, β по представленному алгоритму является выполнение неравенства:

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) < \varepsilon_*, \quad \varepsilon_1 = \left| \frac{\lambda^{s+1} - \lambda^s}{\lambda^s} \right|, \quad \varepsilon_2 = \left| \frac{\beta^{s+1} - \beta^s}{\beta^s} \right|.$$

1.2.1 Определение плотности газа по известным температуре и давлению из уравнения Редлиха — Квонга

Для ряда вычислений, проводимых в настоящей работе, требуется определить плотность газовой смеси из уравнения состояния (9) по известным температуре T и давлению p . Уравнение состояния Редлиха — Квонга является кубическим относительно ρ . Для его решения используется формула Кардано [17].

В уравнении состояния (9) проводится замена переменных:

$$a = pT^{1/2}, \quad b = pT^{1/2}\delta^2, \quad l = hT^{3/2}, \quad m = hT^{3/2}\delta, \quad n = c\delta.$$

В результате оно принимает вид:

$$n\rho^3 + (m - c + b)\rho^2 + l\rho - a = 0.$$

Обозначим:

$$s_1 = (m - c + b)/n, \quad s_2 = l/n, \quad s_3 = -a/n, \\ \rho = t - s_1/3. \quad (33)$$

После проведенной замены переменных уравнение (9) записывается в виде неполного кубического уравнения:

$$t^3 + p_1 t + q = 0, \quad (34) \\ p_1 = \frac{3s_2 - s_1^2}{3}, \quad q = \frac{2s_1^2}{27} - \frac{s_1 s_2}{3} + s_3.$$

Дискриминант этого уравнения имеет вид

$$D = \left(\frac{p_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2. \quad (35)$$

При всех практически значимых параметрах давления p и температуры T газа в системе СИ дискриминант (35) положителен $D > 0$. При $D > 0$ уравнение имеет один вещественный корень и два комплексных. Физический смысл имеет вещественный корень.

На рис.1.а, 1.б представлены зависимости значений дискриминанта D от давления и температуры в широком диапазоне их изменения.

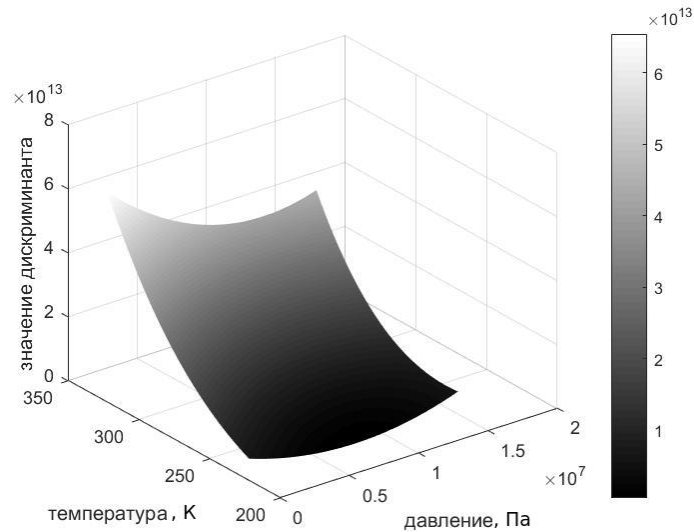


Рис.1.а. Зависимость значений дискриминанта от входных параметров p и T .

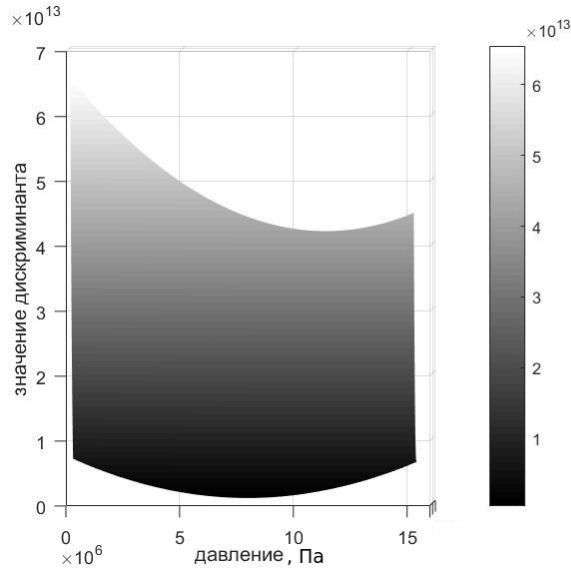


Рис.1.6. Зависимость значений дискриминанта от входных параметров p и T .

Решение уравнения (34) ищется в виде $t = \alpha + \gamma$. В результате этой подстановки приходим к равенству

$$(\alpha^3 + \gamma^3) + (3\alpha\gamma + p_1)(\alpha + \gamma) + q = 0,$$

которое верно при α, γ , являющимися решениями следующей системы

$$\begin{cases} 3\alpha\gamma = -p_1, \\ \alpha^3 + \gamma^3 = -q, \end{cases} \quad (36)$$

α, γ являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 + qx - \frac{p_1^3}{3^3} = 0$$

и следовательно равны

$$\alpha^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p_1^3}{3^3}}, \quad \gamma^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p_1^3}{3^3}},$$

т.е. выражаются через квадратные корни из дискриминанта (35). Найденные выражения для α^3, γ^3 позволяют записать общий вид решения $t = \alpha + \gamma$ уравнения (34).

$$t = \alpha + \gamma = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p_1^3}{3^3}} \right)^{1/3} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p_1^3}{3^3}} \right)^{1/3}.$$

В формулу Кардано входят кубические корни, и квадратные корни. В решение входят только те из них, которые удовлетворяют условию $3\alpha\gamma = -p$. Поэтому достаточно найти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и по ним определить три корня $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Как известно, зная корни ε_k n -й степени из 1, легко найти все корни ω_k n -й степени из заданного комплексного числа z , а именно

$$\omega_k = \omega_0 \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, \dots, (n-1),$$

$$\omega_0 = |z|^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right), \quad \varphi = \arg z.$$

Корни третьей степени $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ из 1 равны:

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Таким образом, корни $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ находятся по формуле

$$\alpha_k = \alpha_0 \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$\alpha_0 = |z|^{1/3} \left(\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right),$$

$$z = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}, \quad \varphi = \arg z.$$

В рассматриваемом диапазоне изменения температуры и давления дискриминант удовлетворяет условию $\sqrt{D} > \frac{q}{2}$, в этом случае имеют место следующие выражения:

$$\varphi = 0, \quad \alpha_0 = |z|^{1/3}, \quad \alpha_1 = \alpha_0, \quad \gamma_1 = -\frac{p_1}{3\alpha_0}.$$

Решение уравнения (34) имеет вид

$$t = \alpha_0 - \frac{p_1}{3\alpha_0}. \quad (37)$$

Таким образом из выражений (33), (37) получаем аналитическое представление для плотности газа:

$$\rho = \alpha_0 - \frac{p_1}{3\alpha_0} - \frac{s_1}{3}.$$

$$\rho = \left| - \left(\frac{2(hT^{3/2}\delta - c + pT^{1/2}\delta^2)^2}{54(c\delta)^2} - \frac{(hT^{3/2}\delta - c + pT^{1/2}\delta^2)hT^{3/2}}{6(c\delta)^2} - \frac{pT^{1/2}}{2c\delta} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\left(\frac{3(hT^{3/2}/c\delta) - ((hT^{3/2}\delta - c + pT^{1/2}\delta^2)/c\delta)^2}{9} \right)^3 + \right. \\
& \quad + \left(\frac{2(hT^{3/2}\delta - c + pT^{1/2}\delta^2)^2}{54(c\delta)^2} - \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{(hT^{3/2}\delta - c + pT^{1/2}\delta^2)hT^{3/2}}{6(c\delta)^2} - \frac{pT^{1/2}}{2c\delta} \right)^2 \right)^{1/2} \Big|^{1/3} - \\
& - \left(3(hT^{3/2}/c\delta) - ((hT^{3/2}\delta - c + pT^{1/2}\delta^2)/c\delta)^2 \right) / \left(9 \times \right. \\
& \times \left| - \left(\frac{2(hT^{3/2}\delta - c + pT^{1/2}\delta^2)^2}{54(c\delta)^2} - \frac{(hT^{3/2}\delta - c + pT^{1/2}\delta^2)hT^{3/2}}{6(c\delta)^2} - \frac{pT^{1/2}}{2c\delta} \right) + \right. \\
& \quad + \left(\left(\frac{3(hT^{3/2}/c\delta) - ((hT^{3/2}\delta - c + pT^{1/2}\delta^2)/c\delta)^2}{9} \right)^3 + \right. \\
& \quad + \left(\frac{2(hT^{3/2}\delta - c + pT^{1/2}\delta^2)^2}{54(c\delta)^2} - \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{(hT^{3/2}\delta - c + pT^{1/2}\delta^2)hT^{3/2}}{6(c\delta)^2} - \frac{pT^{1/2}}{2c\delta} \right)^2 \right)^{1/2} \Big|^{1/3} \Big) - \\
& \quad - \frac{hT^{3/2}\delta - c + pT^{1/2}\delta^2}{3c\delta}.
\end{aligned} \tag{38}$$

1.3 Решение тестовых задач

Приведем расчет параметров коэффициента гидравлического сопротивления λ и суммарного коэффициента теплообмена β по представленному в пункте 1.2 алгоритму для следующего варианта задачи. Рассматривается модельный газопровод. На входе в газопровод задаются постоянные температура $T^0 = 313,15$ К и давление $p^0 = 20$ МПа газа. По этим значениям T^0, p^0 определяется, как показано в пункте 1.2.1, плотность ρ^0 газовой смеси на входе. Температура окружающей воды принимается равной $T^* = 278,15$ К; длина газопровода $L = 300$ км; массовый расход газовой смеси $Q = 400$ кг/с; внутренний радиус $R = 0,5$ м.

Рассчитывались значения $h, c, \delta, \mu, k_s, c_v$, характерные для транспортировки по морским газопроводам смеси газов с преобладанием метана (значения всех параметров приведены в системе СИ):

$$h = 496,630658 \quad c = 1219,54091, \quad \delta = 0,001816, \quad c_v = 2000,0,$$

$$\mu = 0.00001, \quad k_s = 1.0 \cdot 10^{-5}.$$

Трасса газопровода разбивалась на $n = 2$ участка, длиной 150 километров каждый, т. е. $z_1^* = 150$ км, $z_2^* = 150$ км. Для апробации методики идентификации параметров использовалась следующая схема: численный эксперимент разделялся на три этапа. На первом этапе была решена прямая задача, т. е. при заданных коэффициенте гидравлического сопротивления $\lambda^* = 0,00829$ и суммарном коэффициенте теплообмена $\beta^* = 6,18(\text{Вт}/(\text{м}^2 \text{ К}))$ были рассчитаны все характеристики потока — температура, плотность и давление. На втором этапе в качестве начального приближения для ρ и T в задаче идентификации использовались данные полученные на первом этапе. Значения плотности и температуры на концах участка, полученные с первого этапа, принимались за известные из эксперимента: $T(z_1^*) = 283,19$ К, $T(z_2^*) = 278,12$ К, $\rho(z_1^*) = 177,21$ кг/м³, $\rho(z_2^*) = 170,38$ кг/м³. Значения коэффициентов гидравлического сопротивления λ^* и теплообмена β^* были искажены и в качестве начальных приближений использовались $\tilde{\lambda} = 100\lambda^*$, $\tilde{\beta} = 2\beta^*$. На третьем этапе данные, полученные на втором этапе, использовались в задаче идентификации. Таким образом был обеспечен контроль над используемыми в обратной задаче данными. Коэффициент гидравлического сопротивления λ^* для первого этапа определялся по закону сопротивления Коулбрука–Уайта

$$\frac{1}{\lambda} = -2 \lg \frac{k}{7,4} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}}$$

при коэффициенте шероховатости $k = 10^{-5}$ (м).

Для тестового варианта точность ε_* расчета относительного отклонения рассчитанных значений λ и β составила $\varepsilon_* = 10^{-4}$.

Для решения данной задачи была написана и отлажена программа на языке C++. В таблице 1 приведены значения модуля относительных отклонений $\delta\lambda = \left(\frac{\lambda - \lambda^*}{\lambda^*}\right)$ и $\delta\beta = \left(\frac{\beta - \beta^*}{\beta^*}\right)$, рассчитанные в I, ..., V итерациях.

На каждой итерации при расчете λ и β пересчитывались значения плотности и температуры. В таблице 2 представлены отклонения δ_T, δ_ρ «точных» значений (T, ρ) , т. е. рассчитанных из решения прямой задачи харак-

Таблица 1:

№ участка		№ итерации				
		I	II	III	IV	V
1	$ \delta\lambda $	0,0174	0,0338	0,0279	0,0285	0,0285
2	$ \delta\lambda $	0,2451	0,0053	0,0020	0,0017	0,0017
1	$ \delta\beta $	0,0242	0,0083	0,0044	0,0049	0,0049
2	$ \delta\beta $	0,0294	0,0277	0,0025	0,0001	0,0001

теристик потока от рассчитанных по процедуре идентификации (T_{ind}, ρ_{ind}) .

$$|\delta_T| = \left(\frac{T_{ind}}{T} - 1 \right) 100\%, \quad |\delta_\rho| = \left(\frac{\rho_{ind}}{\rho} - 1 \right) 100\%.$$

Таблица 2:

z_{*KM}	50	100	150	200	250	300
$ \delta_T , \%$	0,004	0,002	0,00	0,004	0,001	0,00
$ \delta_\rho , \%$	0,051	0,041	0,00	0,029	0,017	0,00

Исследовалось влияние на точность расчета λ и β точность измерения температуры на концах участков. Для этого значения плотности и температуры на концах участка, принимаемые за известные экспериментальные данные, полученные с первого этапа были намеренно искажены. Расчеты показали, что погрешность в точности измерений в 0,5% является допустимой. При большей погрешности итерационный процесс не сходится.

Получаемая точность определения λ и β достаточна для адекватного расчета основных характеристик потока.

Глава 2. Исследование влияния давления и температуры на входе в газопровод на характеристики потока

В настоящей главе исследуется влияние давления и температуры на входе в газопровод на характеристики потока. А именно, рассмотрено влияние давления p_{z0} и температуры T_{z0} (5) на входе в газопровод на величину суммарного падения давления. При высоких давлениях, когда скорость потока мала, основной вклад в падение давления вносит трение газа о стенки газопровода. При уменьшении давления, как следует из уравнения состояния (4) падает плотность газа, что в свою очередь для установившихся режимов течения, как следует из интеграла уравнения неразрывности (1), приводит к увеличению скорости потока. В результате увеличивается слагаемое отвечающего за трение, что приводит к еще большему падению давления. При дальнейшем повышении скорости в падение давления вносит дополнительный вклад инерциальное слагаемое $\rho u \frac{du}{dz}$. Проведенные расчеты показали, что существует предельное давление на входе p_{z0}^* , которое приводит к недопустимым режимам, связанным с резким повышением скорости потока, т.к. существуют технологические ограничения на ее величину [15], [20].

Для решения системы уравнений модели неизотермического установившегося течения газа (1)–(4) с варьируемыми граничными условиями (5) использовался метод Рунге–Кутты 4-го порядка точности. Давление p и скорость u определялись по найденным величинам плотности ρ и температуры T из (6), (9). Расчеты по модели (1)–(5) позволяют найти зависимость критического давления p_{z0}^* от температуры T на входе в газопровод. Была отлажена программа на языке C++. Расчеты по программе представлены далее на рисунках 2, 3.

На рисунке 2 представлено распределение скорости потока $u(z)$ в зависимости от давления p_{z0} на входе при температуре $T_{z0} = 313$ К. Кривая 3 отражает распределение скорости при недопустимом давлении на входе, т. е. давлении ниже критического. Технологические ограничения на ско-

рость потока составляют 25 м/с [20].

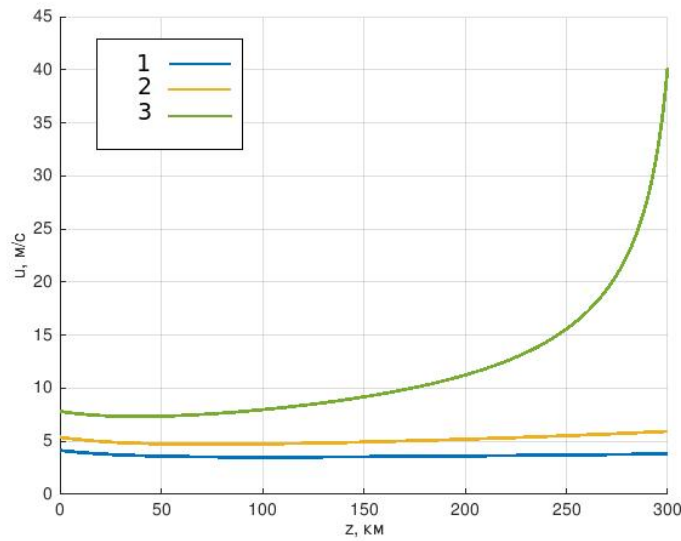


Рис.2 Зависимость скорости потока от изменения давления на входе при температуре $T_{z0}=313$ К: 1 — $p_{z0}=162$ атм; 2 — $p_{z0}=125$ атм; 3 — $p_{z0}=88$ атм.

Из рисунка 2 следует, что существует критическое давление p_{z0}^* на входе, при котором транспортировка газа при выбранных параметрах процесса ведет к стремительному нарастанию скорости.

С другой стороны, благоприятным фактором для увеличения плотности газа, а следовательно для снижения скорости потока, является понижение температуры на входе. Однако сильно понижать температуру нельзя из-за возможного выпадения гидратов.

На рисунке 3 представлено распределение скорости потока $u(z)$ в зависимости от температуры T_{z0} на входе при давлении $p_{z0} = 150$ атм.

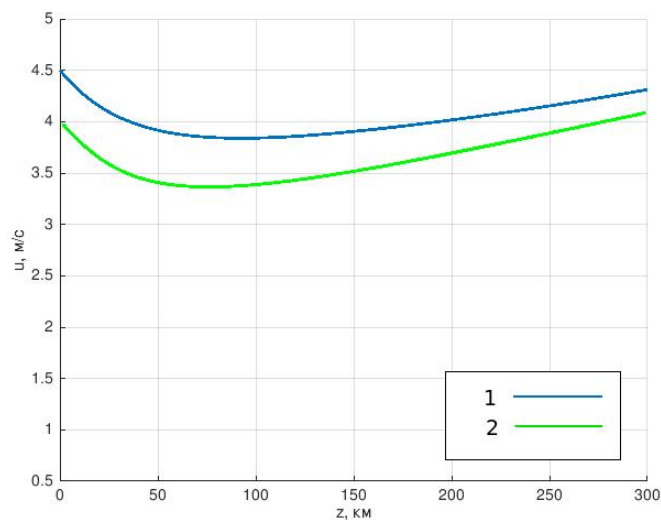


Рис.3 Зависимость скорости потока от изменения температуры на входе при давлении

$p_{z0}=150$ атм: 1 — $T_{z0} = 333$ К; 2 — $T_{z0} = 293$ К.

Для каждого набора параметров процесса транспортировки существует нижний предел p_{z0}^* допустимого давления на входе в газопровод, он зависит от температуры T_{z0} . Например, для $T_{z0} = 333$ К критическое давление на входе равно $p_{z0}^* = 113$ атм, а при $T_{z0} = 293$ К и при неизменных остальных параметрах критическое давление на входе составляет величину $p_{z0}^* = 91$ атм.

Таким образом в главе 2 исследована область допустимых значений давления и температуры на входе в газопровод. Создана программа, позволяющая определять критические значения на входе и рассчитывать все характеристики установившегося течения газа по подводным газопроводам.

Заключение

В работе проведено исследование параметрической идентификации математической модели неизоэтермического установившегося течения газа по подводным газопроводам. Представлен метод идентификации коэффициента гидравлического сопротивления и суммарного коэффициента теплообмена по известным экспериментальным данным. Процедура идентификации позволяет верифицировать расчет этих параметров и адаптировать модель к реальным условиям прокладки газопровода. Исследована область допустимых значений давления и температуры газа на входе в газопровод, определены критические значения давления, которые приводят к недопустимым режимам, связанным с резким повышением скорости потока.

Приведем основные результаты проведенных исследований.

1. Решена задача идентификации коэффициента гидравлического сопротивления и суммарного коэффициента теплообмена газа с окружающей средой в модели установившегося неизоэтермического течения газа по морским газопроводам.
2. Создана программа, написанная на языке C++, реализующая алгоритм идентификации.
3. Приведены результаты исследования необходимой точности задания экспериментальных данных на концах участков газопровода.
4. Создана программа расчета установившегося режима течения газа, написанная на языке C++.
5. Приведены результаты исследования области допустимых значений давления и температуры газа на входе в газопровод.

Список литературы

- [1] Тихонов А. Н. Об обратной задаче для нелинейного дифференциального уравнения / А. Н. Тихонов // Журнал ВМ и МФ. 1983. Т. 23, №1. С. 95–101.
- [2] Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач / А. Н. Тихонов // ДАН СССР. 1943. Т. 5, №39. С. 195–198.
- [3] Аниконов Ю. Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений / Ю. А. Аниконов. Новосибирск: Наука, 1978. 118 с.
- [4] Р. Беллман, Р. Калаба Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. пер. с англ. И. А. Вателя, Ф. И. Ерешко; под ред. Ф. Л. Черноушко. Москва: Изд-во «Мир», 1969. 180 с.
- [5] П. Эикхофф. Основы идентификации систем управления. Москва: Изд-во «Мир», 1975. 680 с.
- [6] Д. Гроп Методы идентификации систем; пер. с англ. В. А. Васильева, В. И. Лопатина; под ред. Е. И. Кринецкого. Москва: Изд-во «Мир», 1979. 305 с.
- [7] Бабе Г. Д., Бондарев Э. А., Воеводин А. Ф., Каниболотский М. А. Идентификация моделей гидравлики. Новосибирск: Наука, 1980. 160 с.
- [8] Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И. Параметрическая идентификация модели установившегося неизотермического течения газа по морскому газопроводу // Морские интеллектуальные технологии, 2017. №1. 8–13 с.
- [9] Бобровский С. А., Щербаков С. Г., Яковлев Е. И., Гарляускас А. И., Грачев В. В. Трубопроводный транспорт газа. М: Наука, 1976. 495 с.
- [10] Васильев О. Ф., Бондарев Э. А., Воеводин А. Ф., Каниболотский М. А. Неизотермическое течение газа в трубах. Новосибирск: Наука, 1978. 128 с.

- [11] Лежнев А. В. Идентификация параметров модели газопровода при стационарном режиме течения // Матем. моделирование и краев. задачи. 2005. Часть 2. С. 165–167.
- [12] Казак К. А. Моделирование нестационарных режимов газопроводов с граничными условиями по давлению и температуре в начале участка и массовому расходу на конце / К. А. Казак, А. С. Казак // Системы управления и информационные технологии. 2007. Т.29, №3. С. 8–10.
- [13] Курбатова Г. И., Попова Е. А., Филиппов Б. В., Филиппов В. Б., Филиппов К. Б. Модели морских газопроводов. СПб: Изд-во С.-Петербур. гос. ун-та, 2005. 156 с.
- [14] Рид Р. Свойства газов и жидкостей /Р. Рид, Дж. Праусниц, Т. Шервуд; пер. с англ.; под ред. Б. И. Соколова. 3-е изд., перераб. и доп. — Л.: Химия, Ленингр. отд., 1982. 592 с.
- [15] Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И. Анализ режимов транспортировки газа по морским газопроводам// Вестник С.-Петербур. ун-та. Сер. 10. 2016. Вып. 4.
- [16] Кривошеин Б. Л. Теплофизические расчеты газопроводов / Б. Л. Кривошеин. М: Недра, 1982. 168 с.
- [17] Курбатова Г. И., Филиппов В. Б. Курс лекций по алгебре. СПб: Изд-во Лань, 2015. 656 с.
- [18] Казак К. А., Чионов А. М., Коршунов С. А., Кулик В. С., Казак А. С. Идентификация неизмеряемых параметров газопровода для моделирования параметров потока газа // Трубопроводный транспорт [теория и практика]. 2012. №2. С. 36–41.
- [19] Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С. Численный метод идентификации гидравлических параметров // В сб.: Методы МСС. Якутск. 1977. С. 30–40.
- [20] Морской стандарт DNV-OS-F101 подводные трубопроводные системы. ОАО «Газпром». Москва, 2006. 453 с.

- [21] Ljung, L. System Identification. Theory for the User / L. Ljung. Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1999. 609 p.
- [22] Kalaba. R. On Nonlinear Differential Equations, the Maximum Operation, and Monotone Convergence. Journal of Mathematics and Mechanics, 8, 1959. pp. 519–574.

Приложение

Здесь приведены явные выражения для производных $\frac{\partial F_k}{\partial \rho}$, $\frac{\partial F_k}{\partial T}$, $\frac{\partial F_k}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial F_k}{\partial \beta}$, $k = 1, 2$ входящих в системы (30), (32), (34), (35) главы 2.

Производная $\frac{\partial F_1}{\partial \rho}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_1}{\partial \rho} = & \left(m_2 + 2m_1\rho \left(\frac{m_4}{\rho^2} + m_6(T^* - T) \right) \right) \times \\
 & \times \left(\frac{m_8\rho}{1 - m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1 + m_3\rho)T^{3/2}} \right) - \\
 & - 2m_1m_4 \left(\frac{m_8\rho}{1 - m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1 + m_3\rho)T^{3/2}} \right) \rho^{-1} + \\
 & + m_1\rho^2 \left(\frac{m_4}{\rho^2} + m_6(T^* - T) \right) \left(\frac{m_8}{1 - m_3\rho} + \frac{m_8m_3\rho}{(1 - m_3\rho)^2} + \right. \\
 & \left. + 2\frac{m_9\rho}{(1 + m_3\rho)T^{3/2}} - \frac{m_9m_3\rho}{(1 + m_3\rho)^2T^{3/2}} \right) \times \\
 & \times \left(1 - m_1\rho^2 \left(\frac{m_8T}{(1 - m_3\rho)^2} - \frac{m_9\rho(2 + m_3\rho)}{(1 + m_3\rho)^2\sqrt{T}} \right) - \right. \\
 & \left. - m_1\rho^2 \left(\frac{m_8\rho}{1 - m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1 + m_3\rho)T^{3/2}} \right) \times \right. \\
 & \times \left(m_5 \left(\frac{m_8T}{(1 - m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1 + m_3\rho)\sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1 + m_3\rho)\sqrt{T}} \right) \Big)^{-1} - \\
 & - \left(m_2\rho + m_1\rho^2 \left(\frac{m_4}{\rho^2} + m_6(T^* - T) \right) \right) \times \\
 & \times \left(\frac{m_8\rho}{1 - m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1 + m_3\rho)T^{3/2}} \right) \times \\
 & \times \left(-2m_1\rho \left(\frac{m_8T}{(1 - m_3\rho)^2} - \frac{m_9\rho(2 + m_3\rho)}{(1 + m_3\rho)^2\sqrt{T}} \right) - \right. \\
 & - m_1\rho^2 \left(2\frac{m_8m_3T}{(1 - m_3\rho)^3} - \frac{m_9(2 + m_3\rho)}{(1 + m_3\rho)^2\sqrt{T}} - \frac{m_9m_3\rho}{(1 + m_3\rho)^2\sqrt{T}} + \right. \\
 & \left. + 2\frac{m_9\rho(2 + m_3\rho)m_3}{(1 + m_3\rho)^3\sqrt{T}} \right) - 2m_1\rho \left(\frac{m_8\rho}{1 - m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1 + m_3\rho)T^{3/2}} \right) \times \\
 & \times \left(m_5 \left(\frac{m_8T}{(1 - m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1 + m_3\rho)\sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1 + m_3\rho)\sqrt{T}} \right) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m_1\rho^2 \left(\frac{m_8}{1-m_3\rho} + \frac{m_8m_3\rho}{(1-m_3\rho)^2} + \right. \\
& \quad \left. + 2\frac{m_9\rho}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} - \frac{m_9m_3\rho^2}{(1+m_3\rho)^2T^{3/2}} \times \right. \\
& \quad \times \left(m_5 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) - \\
& \quad -m_1\rho^2 \left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \times \right. \\
& \quad \times \left(m_5 \left(\frac{m_8m_3T}{(1-m_3\rho)^2\rho} - \frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho^2} + \frac{m_9m_3}{(1+m_3\rho)^2\sqrt{T}} \right) - \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{m_7m_3}{(1+m_3\rho)^2\sqrt{T}} \right) \right) \left(1 - m_1\rho^2 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)^2} - \frac{m_9\rho(2+m_3\rho)}{(1+m_3\rho)^2\sqrt{T}} \right) - \right. \\
& \quad \left. -m_1\rho^2 \left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left(m_5 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} + \frac{m_7}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) \right)^{-2}.
\end{aligned}$$

Производная $\frac{\partial F_1}{\partial T}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial T} = & \left(-m - 1\rho^2m_6 \left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1-m_3\rho)T^{3/2}} \right) - \right. \\
& - 3/2m_1\rho^4 \left(\frac{m_4}{\rho^2} + m_6(T^* - T) \right) m_9(1+m_3\rho)^{-1}T^{-5/2} \Big) \times \\
& \times \left(1 - m_1\rho^2 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)^2} - \frac{m_9\rho(2+m_3\rho)}{(1-m_3\rho)^2\sqrt{T}} \right) - \right. \\
& \quad -m_1\rho^2 \left(\frac{m_8\rho}{(1-m_3\rho)} + \frac{m_9\rho^2}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \times \right. \\
& \quad \times \left(m_5 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1-m_3\rho)\sqrt{T}} \right) \Big)^{-1} - \\
& - \left(m_2\rho + m_1\rho^2 \left(\frac{m_4}{\rho^2} + m_6(T^* - T) \right) \times \right. \\
& \quad \times \left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1-m_3\rho)T^{3/2}} \right) + \\
& \quad + 3/2m_1\rho^4m_9 \left(m - 5 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_7}{(1 - m_3\rho)\sqrt{T}} \Big) (1 - m_3\rho)^{-1} T^{-5/2} - \\
& - m_1\rho^2 \left(\frac{m_8\rho}{1 - m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1 - m_3\rho)T^{3/2}} \right) \times \\
& \times \left(m_5 \left(\frac{m_8}{(1 - m_3\rho)\rho} + 1/2 \frac{m_9}{(1 - m_3\rho)T^{3/2}} \right) - \right. \\
& \quad \left. - 1/2 \frac{m_7}{(1 - m_3\rho)T^{3/2}} \right) \Big) \times \\
& \times \left(1 - m_1\rho^2 \left(\frac{m_8T}{(1 - m_3\rho)^2} - \frac{m_9\rho(2 + m_3\rho)}{(1 - m_3\rho)^2\sqrt{T}} \right) - \right. \\
& \quad \left. - m_1\rho^2 \left(\frac{m_8\rho}{1 - m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1 - m_3\rho)T^{3/2}} \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left(m_5 \left(\frac{m_8T}{(1 - m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1 - m_3\rho)\sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1 - m_3\rho)\sqrt{T}} \right) \right)^{-2}
\end{aligned}$$

Производная $\frac{\partial F_2}{\partial \rho}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = & -2\frac{m_4}{\rho^3} + m_5 \frac{m_8Tm_3}{(1 - m_3\rho)^2\rho} - \frac{m_8T}{(1 - m_3\rho)\rho^2} + \frac{m_9m_3}{(1 - m_3\rho)^2\sqrt{T}} - \\
& - \frac{m_7m_3}{(1 - m_3\rho)^2\sqrt{T}} \left(m_2\rho + m_1\rho^2 \left(\frac{m_4}{\rho^2} + m_6(T^* - T) \right) \times \right. \\
& \quad \times \left(\frac{m_8\rho}{1 - m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1 - m_3\rho)T^{3/2}} \right) \Big) \times \\
& \times \left(1 - m_1\rho^2 \left(\frac{m_8T}{(1 - m_3\rho)^2} - \frac{m_9\rho(2 - m_3\rho)}{(1 - m_3\rho)^2\sqrt{T}} \right) - \right. \\
& \quad \left. - m_1\rho^2 \left(\frac{m_8\rho}{1 - m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1 + m_3\rho)T^{3/2}} \right) \times \right. \\
& \quad \times \left(m_5 \left(\frac{m_8T}{(1 - m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1 + m_3\rho)\sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1 + m_3\rho)\sqrt{T}} \right) \Big)^{-1} + \\
& + \left(m_5 \left(\frac{m_8T}{(1 - m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1 + m_3\rho)\sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1 + m_3\rho)\sqrt{T}} \right) \times \\
& \quad \times \left(m_2 + 2m_1\rho \left(\frac{m_4}{\rho^2} + m_6(T^* - T) \right) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{m_8 \rho}{1 - m_3 \rho} + \frac{m_9 \rho^2}{(1 + m_3 \rho) T^{3/2}} \right) - \\
& - 2m_1 m_4 \left(\frac{m_8 \rho}{1 - m_3 \rho} + \frac{m_9 \rho^2}{(1 + m_3 \rho) T^{3/2}} \right) \rho^{-1} + \\
& + m_1 \rho^2 \left(\frac{m_4}{\rho^2} + m_{(T^* - T)} \right) \times \\
& \times \left(\frac{m_8}{1 - m_3 \rho} + \frac{m_8 \rho_3}{(1 - m_3 \rho)^2} + \right. \\
& \left. + 2 \frac{m_9 \rho}{(1 + m_3 \rho) T^{3/2}} - \frac{m_9 \rho^2 m_3}{(1 + m_3 \rho)^2 T^{3/2}} \right) \times \\
& \times \left(1 - m_1 \rho^2 \left(\frac{m_8 T}{(1 - m_3 \rho)^2} - \frac{m_9 \rho (2 + m_3 \rho)}{(1 + m_3 \rho)^2 \sqrt{T}} \right) - \right. \\
& \left. - m_1 \rho^2 \frac{m_8 \rho}{1 - m_3 \rho} + \frac{m_9 \rho^2}{(1 + m_3 \rho) T^{3/2}} \right) \times \\
& \times \left(m_5 \left(\frac{m_8 T}{(1 - m_3 \rho) \rho} - \frac{m_9}{(1 + m_3 \rho) \sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1 + m_3 \rho) \sqrt{T}} \right)^{-1} - \\
& - \left(m_5 \left(\frac{m_8 T}{(1 - m_3 \rho) \rho} - \frac{m_9}{(1 + m_3 \rho) \sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1 + m_3 \rho) \sqrt{T}} \right) \times \\
& \times \left(m_2 \rho + m_1 \rho^2 \left(\frac{m_4}{\rho^2} + m_6 (T^* - T) \right) \left(\frac{m_8 \rho}{1 - m_3 \rho} + \frac{m_9 \rho^2}{(1 + m_3 \rho) T^{3/2}} \right) \right) \times \\
& \times \left(-2m_1 \rho \left(\frac{m_8 T}{(1 - m_3 \rho)^2} - \frac{m_9 \rho (2 + m_3 \rho)}{(1 + m_3 \rho)^2 \sqrt{T}} \right) - \right. \\
& - m_1 \rho^2 \left(2 \frac{m_8 T m_3}{(1 - m_3 \rho)^3} - \frac{m_9 (2 + m_3 \rho)}{(1 + m_3 \rho)^2 \sqrt{T}} - \frac{m_9 \rho m_3}{(1 + m_3 \rho)^2 \sqrt{T}} + \right. \\
& \left. + 2 \frac{m_9 \rho (2 + m_3 \rho) m_3}{(1 + m_3 \rho)^3 \sqrt{T}} - 2m_1 \rho \left(\frac{m_8 \rho}{1 - m_3 \rho} + \frac{m_9 \rho^2}{(1 + m_3 \rho) T^{3/2}} \right) \right) \times \\
& \times \left(m_5 \left(\frac{m - 8T}{(1 - m_3 \rho) \rho} - \frac{m_9}{(1 + m_3 \rho) \sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1 + m_3 \rho) \sqrt{T}} \right) - \\
& - m_1 \rho^2 \left(\frac{m_8}{1 - m_3 \rho} + \frac{m_8 \rho m_3}{(1 - m_3 \rho)^2} + 2 \frac{m_9 \rho}{(1 + m_3 \rho) T^{3/2}} - \right. \\
& \left. - \frac{m_9 \rho^2 m_3}{(1 + m_3 \rho)^2 T^{3/2}} \right) \left(m_5 \left(\frac{m_8 T}{(1 - m_3 \rho) \rho} - \frac{m_9}{(1 + m_3 \rho) \sqrt{T}} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_7}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \Big) - m_1\rho^2 \left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \right) \times \\
& \times \left(m_5 \left(\frac{m_8Tm_3}{(1-m_3\rho)^2\rho} - \frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho^2} + \frac{m_9m_3}{(1+m_3\rho)^2\sqrt{T}} \right) - \right. \\
& \quad \left. \frac{m_7m_3}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) \Big) \left(-m - 1\rho^2 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)^2} - \frac{m_9\rho(2+m_3\rho)}{(1+m_3\rho)^2\sqrt{T}} \right) - \right. \\
& \quad \left. -m_1\rho^2 \left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left(m_5 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) \right)^{-2}.
\end{aligned}$$

Производная $\frac{\partial F_2}{\partial T}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial T} = & -m_6 + \left(m_5 \left(\frac{m_8}{(1-m_3\rho)\rho} + 1/2 \frac{m_9}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \right) - \right. \\
& -1/2 \frac{m_7}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \Big) \left(m_2\rho + m_1\rho^2 \left(\frac{m_4}{\rho^2} + m_6(T^* - T) \right) \times \right. \\
& \quad \times \left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \right) \Big) \times \\
& \quad \times \left(1 - m_1\rho^2 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)^2} - \frac{m_9\rho(2+m_3\rho)}{(1+m_3\rho)^2\sqrt{T}} \right) - \right. \\
& \quad \left. -m_1\rho^2 \left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \right) \times \right. \\
& \quad \times \left(m_5 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) \Big)^{-1} + \\
& + \left(m_5 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) \times \\
& \quad \times \left(-m_1\rho^2 m_6 \left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \right) - \right. \\
& \quad -3/2 m_1\rho^4 \left(\frac{m_4}{\rho^2} + m_6(T^* - T) \right) m_9(1+m_3\rho)^{-1} T^{-5/2} \Big) \times \\
& \quad \times \left(1 - m_1\rho^2 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)^2} - \frac{m_9\rho(2+m_3\rho)}{(1+m_3\rho)^2\sqrt{T}} \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m_1\rho^2 \left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \right) \times \\
& \times \left(m_5 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) \Big)^{-1} - \\
& - \left(m_5 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) \times \\
& \times \left(m_2\rho + m_1\rho^2 \left(\frac{m_4}{\rho^2} + m_6(T^* - T) \right) \right) \times \\
& \times \left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \right) \Big) \times \\
& \times \left(m_1\rho^2 \left(\frac{m_8}{(1-m_3\rho)^2} + 1/2 \frac{m_9\rho(2+m_3\rho)}{(1+m_3\rho)^2T^{3/2}} \right) + \right. \\
& + 3/2 m_1\rho^4 m_9 \left(m_5 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{m_7}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} (1+m_3\rho)^{-1} T^{-5/2} - \right. \\
& \left. - m_1\rho^2 \left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \right) \right) \times \\
& \times \left(m_5 \left(\frac{m_8}{(1-m_3\rho)\rho} + 1/2 \frac{m_9\rho^2}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \right) - \right. \\
& \left. - 1/2 \frac{m_7}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \right) \Big) \times \\
& \times \left(1 - m_1\rho^2 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)^2} - \frac{m_9\rho(2+m_3\rho)}{(1+m_3\rho)^2\sqrt{T}} \right) - \right. \\
& \left. - m - 1\rho^2 \left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1+m_3\rho)T^{3/2}} \right) \right) \times \\
& \times \left(m_5 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) + \frac{m_7}{(1+m_3\rho)\sqrt{T}} \right) \Big)^{-2}.
\end{aligned}$$

Производная $\frac{\partial F_1}{\partial \lambda}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} = & \left(m_2\rho + m_1m_4 \left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2}{(1-m_3\rho)T^{3/2}} \right) \right) / (1- \\
& - m_1\rho^2 \left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)^2} - \frac{m_9\rho(2+m_3\rho)}{(1-m_3\rho)T^{1/2}} \right) -
\end{aligned}$$

$$-m_1\rho^2\left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho}+\frac{m_9\rho^2(1-m_3\rho)T^{3/2}}{(1-m_3\rho)^2}\right)\times$$

$$\times\left(m_5\left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)^2}-\frac{m_9}{(1-m_3\rho)T^{1/2}}\right)+\frac{m_7}{(1+m_3\rho)T^{1/2}}\right).$$

Производная $\frac{\partial F_1}{\partial \beta}$ имеет вид:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \beta} = \left(m_1\rho^2m - 6\beta(T - T^*)\left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9\rho}{(1+m_3\rho)T^{3/2}}\right)\right) / (1 -$$

$$-m_1\rho^2\left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)^2} - \frac{m_9\rho(2+m_3\rho)}{(1-m_3\rho)T^{1/2}}\right) -$$

$$-m_1\rho^2\left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} + \frac{m_9\rho^2(1-m_3\rho)T^{3/2}}{(1-m_3\rho)^2}\right)\times$$

$$\times\left(m_5\left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)^2} - \frac{m_9}{(1-m_3\rho)T^{1/2}}\right) + \frac{m_7}{(1+m_3\rho)T^{1/2}}\right).$$

Производная $\frac{\partial F_2}{\partial \lambda}$ имеет вид:

$$\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} = \frac{m_4}{\rho^2} + \left(m_5\left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1-m_3\rho)T^{1/2}}\right) +$$

$$+\frac{m_7}{(1+m_3\rho)T^{1/2}}\right)\left(m_2\rho + m_1m_4\left(\frac{m_8\rho}{1-m_3\rho} +$$

$$+\frac{m-9\rho^2}{(1-m-3\rho)T^{3/2}}\right)\right) / \left(1 - m_1\rho^2\left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)^2} -$$

$$-\frac{m_9\rho(2+m_3\rho)}{(1-m_3\rho)^2T^{1/2}}\right) - m - 1\rho^2\left(\frac{m-8\rho}{(1-m_3\rho)} + \frac{m_9\rho^2}{(1+m_3\rho)T^{3/2}}\right)\times$$

$$\times\left(m_5\left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1-m_3\rho)T^{1/2}}\right) + \frac{m_7}{(1+m_3\rho)T^{1/2}}\right).$$

Производная $\frac{\partial F_2}{\partial \beta}$ имеет вид:

$$\frac{\partial F_2}{\partial \beta} = m_6(T^* - T) + \left(m_5\left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho} - \frac{m_9}{(1-m_3\rho)T^{1/2}}\right) +$$

$$+\frac{m_7}{(1+m_3\rho)T^{1/2}}\right)m_1\rho^2m_6(T^* - T)\left(\frac{m_8}{1-m-3\rho} +$$

$$+\frac{m_9}{(1-m_3\rho)T^{1/2}}\right) / \left(1 - m - 1\rho^2\left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)^2} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{m_9\rho(2+m_3\rho)}{(1-m_3\rho)^2T^{1/2}}\Bigg)-m-1\rho^2\left(\frac{m-8\rho}{(1-m_3\rho)}+\frac{m_9\rho^2}{(1+m_3\rho)T^{3/2}}\times\right. \\
& \left.\times\left(m_5\left(\frac{m_8T}{(1-m_3\rho)\rho}-\frac{m_9}{(1-m_3\rho)T^{1/2}}\right)+\frac{m_7}{(1+m_3\rho)T^{1/2}}\right)\right).
\end{aligned}$$